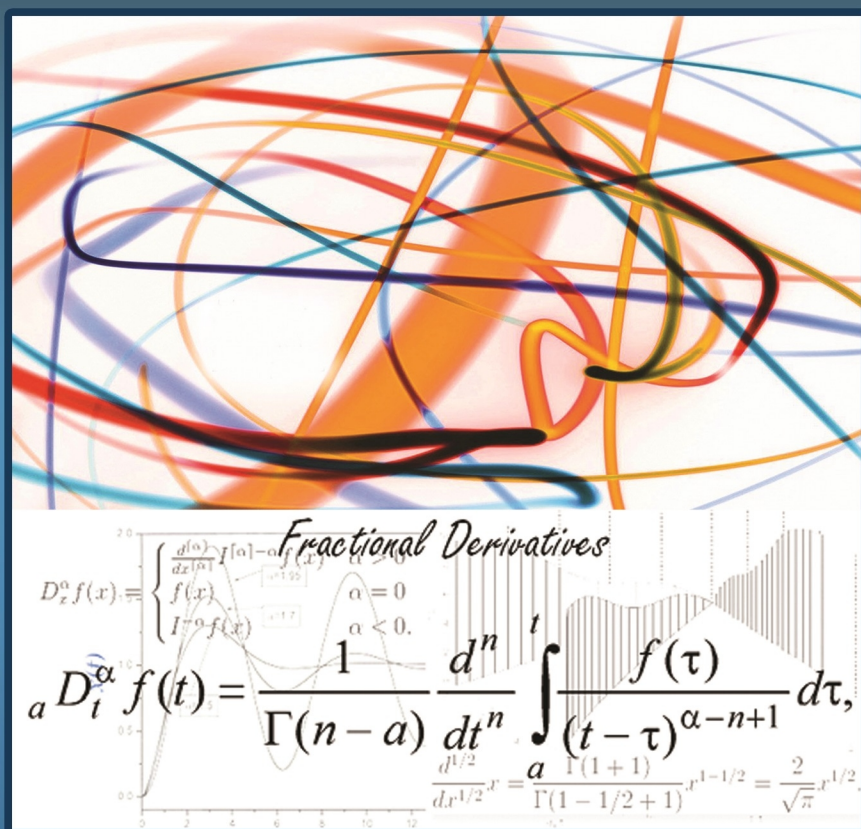


کاربرد حسابان کسری در کنترل مقاوم



تدوین: دکتر علی اکبر جلالی
محمدرضا رحمانی مهدی آبادی
مهدی قاسمی نراقی

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



کاربردِ حسابانِ کسری در کنترلِ مقاوم

تدوین:

دکتر علی اکبر جلالی

محمدرضا رحمانی مهدی آبادی

مهدی قاسمی نراقی

بهار ۱۳۹۴

پیش‌گفتار

از سال ۱۳۸۷ بحث حسابان کسری در گروه کنترل دانشکده‌ی مهندسی برق دانشگاه علم و صنعت ایران مورد توجه دانشجویان قرار گرفت. از آن زمان تاکنون، چندین دانشجو در دوره‌های کارشناسی ارشد و دکترای کنترل در دانشکده‌ی برق فارغ‌التحصیل شده‌اند. در طول تحصیل این دانشجویان مشخص شد که منبع فارسی مناسبی برای حسابان کسری با رویکرد کاربردی آن وجود ندارد. لذا با توجه به علاقه دانشجویان به حسابان کسری برآن شدیم که کتابی را در این زمینه به زبان ساده تدوین نماییم تا به عنوان پایه مورد استفاده علاقه‌مندان قرار گیرد.

حوزه‌ی مباحث کنترلی در حسابان کسری بسیار گسترده است، ولی با توجه به اینکه هدف این کتاب استفاده از این حسابان در کنترل مقاوم بوده است و این مبحث از کنترل نیاز به آشنایی مناسب با خیلی از مفاهیم علم کنترل را دارد، به مباحث مختلفی پرداخته شده است که دانشجویان و محققان به آن احتیاج دارند. همچنین، لازم به ذکر است که مبنای این کتاب پوشش کامل کلیه‌ی مباحث ریاضی حسابان کسری نبوده و در حد نیاز، مفاهیم کاربردی حسابان کسری در مهندسی کنترل توضیح داده شده است.

فصل اول کتاب به تاریخچه‌ی پیدایش حسابان کسری پرداخته و با ذکر یک مثال، عملی بودن استفاده از این حسابان را یادآور شده تا خواننده از کسالت تئوری صرف بودن این حسابان خارج شود. در فصل دوم مفاهیم پایه‌ی حسابان مرتبه‌ی کسری توضیح داده شده است. ابتدا به صفحات ریمان و توابع پرکاربرد همچون گاما و میتاگ-لفلر که در تعاریف مختلف مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری کاربرد دارند، اشاره شده و سپس تعاریف گرانوالد-لتنیکو، ریمان-لیوویل و کاپوتو از مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری بیان و مقایسه شده و در ادامه، رویکردهای مختلف محاسبه و خواص آن‌ها مطرح گردیده است. در انتهای این فصل، معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری و تبدیل لاپلاس در این حوزه بیان شده است. فصل سوم به تعاریف مربوط به سیستم‌های مرتبه‌ی کسری پرداخته است. ویژگی‌های پاسخ زمانی، پاسخ ضربه و مفاهیم صفر و قطب و پاسخ فرکانسی سیستم‌های مرتبه‌ی کسری از مهم‌ترین مباحث این فصل می‌باشند. در ادامه‌ی فصل بلوک اساسی توضیح داده شده و در نهایت، دو مثال کاربردی جهت تفهیم موضوع ارائه گردیده است. در فصل چهارم به پایداری سیستم‌های مرتبه‌ی کسری خطی و غیرخطی اشاره شده و روش‌های کاربرد آن در سیستم‌های خطی مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل‌های پنجم و ششم به شناسایی و تحقق سیستم‌های مرتبه‌ی کسری می‌پردازد. در فصل پنجم، به اختصار، شناسایی در حوزه‌ی زمان و حوزه فرکانس و همچنین، شناسایی مستقیم این سیستم‌ها را مورد مطالعه قرار داده است. در فصل ششم نیز جهت آشنایی خواننده، ابتدا نحوه‌ی تحقق یک بلوک مشتق‌گیر بیان شده و سپس، انواع روش‌های تحقق به‌صورت آنالوگ، دیجیتال، تحلیلی و روش حداقل مربعات خطا به اختصار بیان شده است. ذکر یک مثال و همچنین پیاده‌سازی سیستم‌های مرتبه‌ی کسری توسط FPGA به ایجاد درک عملی خواننده از این مباحث کمک خواهد کرد. لازم به ذکر است که خواننده در صورت تمایل به داشتن اطلاعات بیشتر در این خصوص می‌تواند به کتاب‌های [۵۳] و [۵۴] مراجعه کند.

در نهایت، در فصل هفتم، خواننده با دو مفهوم اساسی از کنترل مقاوم سیستم‌های مرتبه‌ی کسری، یعنی نسل‌های مختلف کنترل کُرُن و کنترل فیدبک کَمی (QFT) آشنا می‌شود. همچنین، سعی گردیده تا با آوردن مثال‌های مناسب این مفاهیم پیچیده برای خواننده ملموس گردد. در پایان، لازم به ذکر است که این کتاب حاصل تلاش جمعی از دانشجویان و فارغ‌التحصیلان گروه کنترل دانشکده‌ی مهندسی برق دانشگاه علم و صنعت ایران و همکاری صمیمانه‌ی بعضی از اساتید محترم مانند آقای دکتر ابوالفضل رنجبر، استاد گروه کنترل دانشکده‌ی برق نوشیروانی دانشگاه صنعتی بابل، که در ویراستاری کتاب همکاری داشته اند، و سایر دوستان می‌باشد که از آن‌ها تشکر می‌شود.

از خواننده‌ی گرامی این کتاب تقاضا می‌شود در صورتی که اشکالی در متن کتاب دیدند و پیشنهادی برای ارتقای آن در چاپ‌های بعدی دارند آن‌را از طریق پست الکترونیکی drjalali@iust.ac.ir اعلام فرمایند.

علی اکبر جلالی

محمد رضا رحمانی

مهدی قاسمی نراقی

بهار ۱۳۹۴

فهرست مطالب

فصل ۱: دیباچه‌ای بر حسابان کسری

- ۱-۱- مقدمه..... (۱)
- ۲-۱- تاریخچه..... (۲)
- ۳-۱- چرا مرتبه‌ی کسری؟..... (۳)
- ۴-۱- مثالی از کاربرد مرتبه‌ی کسری..... (۷)

فصل ۲: مفاهیم پایه در حسابان کسری

- ۱-۲- مقدمه..... (۱۱)
- ۲-۲- تعریف چند تابع پرکاربرد..... (۱۲)
- ۱-۲-۲- صفحاتِ ریمان..... (۱۲)
- ۲-۲-۲- تابعِ گاما..... (۱۳)
- ۳-۲-۲- توابعِ میتاگ-لفلر..... (۱۴)
- ۳-۲- تعاریف مشتق-انتگرالِ کسری..... (۱۶)
- ۱-۳-۲- تعریف گرانوالد-لتنیکو..... (۱۷)
- ۲-۳-۲- تعریف ریمان-لیوویل..... (۱۸)
- ۳-۳-۲- تعریف مشتقِ کاپوتو..... (۲۰)
- ۴-۳-۲- مقایسه‌ی تعاریف..... (۲۱)
- ۴-۲- رویکردهای مختلف محاسبه‌ی مشتق و انتگرالِ کسری..... (۲۴)
- ۱-۴-۲- محاسبه‌ی مشتقِ کسری..... (۲۴)
- ۲-۴-۲- محاسبه‌ی انتگرالِ کسری..... (۲۶)
- ۵-۲- ویژگی‌های مشتق-انتگرال‌های مرتبه‌ی کسری..... (۲۷)
- ۱-۵-۲- خطی بودن..... (۲۷)
- ۲-۵-۲- قاعده‌ی لیبنیز..... (۲۸)
- ۶-۲- معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری..... (۲۹)
- ۷-۲- تابع حالتِ اولیه..... (۳۰)
- ۸-۲- تبدیل لاپلاس مشتق-انتگرالِ مرتبه‌ی کسری..... (۳۲)
- ۱-۸-۲- تبدیل لاپلاس مشتق-انتگرالِ مرتبه‌ی کسری با شرایط اولیه‌ی صفر..... (۳۲)
- ۲-۸-۲- تبدیل لاپلاس با شرایط اولیه‌ی غیر صفر..... (۳۳)

فصل ۳: سیستم‌های مرتبه‌ی کسری

- ۳-۱- مقدمه.....(۳۷)
- ۳-۲- تعریف سیستم‌های مرتبه‌ی کسری.....(۳۹)
- ۳-۳- ویژگی‌های زمانی سیستم‌های مرتبه‌ی کسری.....(۴۵)
- ۳-۴- بررسی چند سیستم مرتبه‌ی کسری.....(۴۹)
- ۳-۴-۱- خط شبه-بی‌نهایت ختم شده به مقاومت.....(۴۹)
- ۳-۴-۲- خط شبه-بی‌نهایت ختم شده به القاگر.....(۵۲)

فصل ۴: پایداری سیستم‌های مرتبه‌ی کسری

- ۴-۱- مقدمه.....(۵۵)
- ۴-۲- پایداری سیستم‌های خطی مرتبه‌ی کسری.....(۵۵)
- ۴-۳- پایداری سیستم‌های غیرخطی مرتبه‌ی کسری.....(۵۷)
- ۴-۴- روش‌های بررسی پایداری سیستم‌های خطی مرتبه‌ی کسری.....(۶۱)
- ۴-۴-۱- مقدمه.....(۶۱)
- ۴-۴-۲- روش مکان هندسی ریشه‌ها.....(۶۲)
- ۴-۴-۳- تبدیلات W و F(۷۴)
- ۴-۴-۴- روش نایکوئیست.....(۸۴)

فصل ۵: شناسایی سیستم‌های مرتبه‌ی کسری

- ۵-۱- مقدمه.....(۹۱)
- ۵-۲- رویکرد متغیر مستقل.....(۹۲)
- ۵-۲-۱- حوزه‌ی زمان.....(۹۲)
- ۵-۲-۲- حوزه‌ی فرکانس : تبدیل لاپلاس توزیع مکانی.....(۹۳)
- ۵-۳- رویکرد مستقیم.....(۹۴)
- ۵-۳-۱- شناسایی سیستم بر مبنای توزیع مرتبه‌ی پیوسته.....(۹۴)
- ۵-۳-۲- شناسایی سیستم بر مبنای توزیع مرتبه‌ی مختلط.....(۱۰۹)

فصل ۶: تحقق سیستم‌های مرتبه‌ی کسری

- ۶-۱- مقدمه.....(۱۲۵)
- ۶-۲- تحقق آنالوگ سیستم‌های مرتبه‌ی کسری.....(۱۲۵)
- ۶-۲-۱- از ساخت مشتق‌گیر مرتبه‌ی غیرصحیح حقیقی تا مرتبه‌ی مختلط.....(۱۲۶)
- ۶-۲-۲- بیان سیستم مرتبه‌ی کسری بر حسب تابع تکین.....(۱۵۱)

ج

- ۶-۲-۳- تحقق امیدانس وربرگ تعمیم یافته با شبکه های نردبانی RC و خطوط انتقال.....(۱۵۵)
- ۶-۳-۳- تحقق دیجیتال سیستم های مرتبه ی کسری.....(۱۵۹)
- ۶-۴-۴- تحقق سیستم های مرتبه ی کسری به صورت تحلیلی.....(۱۵۹)
- ۶-۴-۱- فرمول تفاضل محدود بازگشتی مرتبه ی اول گراندوالد-لنیکو.....(۱۶۰)
- ۶-۴-۲- فرمول های تفاضل بازگشتی مرتبه ی دوم و سوم.....(۱۶۱)
- ۶-۴-۳- فرمول های سیمپسون و توستین.....(۱۶۲)
- ۶-۴-۴- فرمول پاسخ ضربه.....(۱۶۳)
- ۶-۴-۵- فرمول پاسخ پله.....(۱۶۵)
- ۶-۴-۶- فرمول های بسط کسری پیوسته.....(۱۶۶)
- ۶-۴-۷- فرمول های معکوس.....(۱۶۸)
- ۶-۴-۸- گسسته سازی تقریب های زمان پیوسته.....(۱۶۸)
- ۶-۴-۹- تقریب های تکه ای و فشرده.....(۱۶۹)
- ۶-۴-۱۰- مقایسه کارایی تقریب ها.....(۱۷۱)
- ۶-۵-۵- پیاده سازی سیستم مرتبه ی کسری زمان گسسته بر مبنای تقریب حداقل مربعات.....(۱۸۷)
- ۶-۵-۱- گسسته سازی مشتق-انتهال گیرهای مرتبه ی کسری.....(۱۸۸)
- ۶-۵-۲- پاسخ ضربه مشتق-انتهال گیرهای مرتبه ی کسری گسسته شده.....(۱۸۹)
- ۶-۵-۳- طراحی فیلترهای IIR بر اساس روش حداقل مربعات.....(۱۹۱)
- ۶-۵-۴- تقریب پد.....(۱۹۳)
- ۶-۵-۵- روش پرونی.....(۱۹۶)
- ۶-۵-۶- روش شانک.....(۱۹۷)
- ۶-۵-۷- طراحی مشتق گیر FIR دیجیتال مرتبه ی کسری.....(۲۰۶)

فصل ۷: کنترل مقاوم سیستم های مرتبه ی کسری

- ۷-۱- مقدمه.....(۲۱۵)
- ۷-۲- کاربرد سیستم های مرتبه ی کسری و مختلط در کنترل مقاوم.....(۲۱۶)
- ۷-۲-۱- مقدمه.....(۲۱۶)
- ۷-۲-۲- سیستم کنترل کُرُن.....(۲۱۷)
- ۷-۲-۳- کُرُن نسل اول.....(۲۱۸)
- ۷-۲-۴- کُرُن نسل دوم.....(۲۲۱)
- ۷-۲-۵- کُرُن نسل سوم.....(۲۲۵)

- ۶-۲-۷- نسلِ سومِ تعمیم‌یافته.....(۲۲۷)
- ۷-۲-۷- چند مثال از کارکرد نسل‌های مختلف کنترلِ کرن.....(۲۲۸)
- ۸-۲-۷- کاربردِ کرن در تئوری فیدبک کمی.....(۲۳۷)
- فهرست موضوعی.....(۲۴۵)
- مراجع.....(۲۵۱)

فصل ۱

دیباچه‌ای بر حسابان کسری

۱-۱- مقدمه

امروزه با پیشرفت دانش بشری و توسعه‌ی صنعت، روش‌های نوینی در دنیای علم به‌وجود آمده است که برای آسایش بیشتر زندگی بشر از آن‌ها استفاده می‌شود. در بحث کنترل سیستم‌ها در سال‌های نه چندان دور، از کنترل‌کننده‌هایی مانند پی‌ای دی^۱ استفاده می‌شد و امروزه نیز بیش از ۹۰٪ از کنترل‌کننده‌های موجود در بازار همان پی‌ای دی‌ها هستند. با گسترش علم، کنترل‌کننده‌های فازی، تطبیقی، مقاوم و یا ترکیب آن‌ها نیز جای خود را در کنترل سیستم‌ها باز نموده‌اند. اما سوال اینجاست که آیا استفاده از این کنترل‌کننده‌ها می‌تواند کاملاً جوابگو باشد یا خیر.

ریاضی‌دانان، مهندسين و دانشمندان زیادی با عملگرهای مشتق‌گیری سروکار دارند اما می‌توان به جرأت گفت که تعداد کمی از آن‌ها در مورد مرتبه‌ی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری فکر کرده‌اند. در اینجا این سوال پیش می‌آید که چرا باید از مرتبه‌های صحیح استفاده کرد، چرا از مرتبه‌های کسری و یا حتی مختلط استفاده نمی‌کنیم و اینکه آیا اصلاً اهمیتی دارد که به این نوع مرتبه‌ها بپردازیم یا خیر.

^۱ PID

حسابان کسری در سال ۱۶۹۵ با مطرح شدن سوالی از طرف آقای هوپیتال^۱ از آقای لیبنیز^۲ با این مضمون که: «همیشه مشتق‌ها را از مرتبه‌های صحیح در نظر می‌گیریم، و آیا نمی‌توانیم از درجات کسری برای مشتق‌گیری استفاده کنیم؟» شروع شد. قبل از بیان حسابان کسری و کاربرد آن در کنترل، باید گفت که در اینجا از عبارت مرتبه‌ی کسری (که شاید ادبیاتی نزدیک به مرتبه‌ی غیر صحیح داشته باشد)، که شامل هر دو مرتبه‌ی غیر صحیح و مرتبه‌ی مختلط است، استفاده می‌شود.

۱-۲- تاریخچه

تا قبل از سال ۱۶۹۵، مدل‌هایی که برای سیستم‌ها ارائه می‌شد به صورت استاتیکی^۳ بود و ریاضیاتی که برای این سیستم‌ها مطرح می‌شد نیز از علم هندسه و جبر به دست می‌آمد. از سال ۱۶۹۵ تا سال ۱۹۶۰ مدل‌ها تبدیل به مدل‌های دینامیکی^۴ شده و از معادلات دیفرانسیل و انتگرال به عنوان ریاضیات مربوطه استفاده می‌شد. بعد از سال ۱۹۶۰ مدل‌های مرتبه‌ی کسری^۵ وارد عرصه‌ی علم شد، و ریاضیاتی که برای این گونه سیستم‌ها مطرح شد حسابان کسری^۶ بود. حسابان کسری دریاچه‌ای نو به سمت کم کردن حجم محاسبات ریاضی، کاربردی‌تر شدن و

^۱ Hopital

^۲ Leibniz

^۳ Static model

^۴ Dynamical model

^۵ Fractional order system

^۶ Fractional calculus

سریع‌تر و ساده‌تر شدن طراحی کنترل‌کننده‌ها می‌باشد. حسابان کسری تعمیمی از انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری عملگرهای مرتبه‌ی صحیح به مرتبه‌ی کسری می‌باشد.

۱-۳- چرا مرتبه‌ی کسری؟

وقتی از سیستم‌های کنترل مرتبه‌ی صحیح (کلاسیک) استفاده می‌شود، می‌توان به‌طور خلاصه، رفتار سیستم کنترل را با سه ترم تناسبی، انتگرالی و مشتق‌گیری بیان نمود. تاثیرات این ترم‌ها روی رفتار سیستم‌ها به‌صورت زیر است:

۱. افزایش سرعت پاسخ، کاهش خطای حالت ماندگار و باقی ماندن پایداری، برای حالت تناسبی

۲. افزایش پایداری نسبی و حساسیت به نویز، برای حالت مشتق‌گیری

۳. حذف خطای حالت ماندگار و کاهش پایداری نسبی، برای حالت انتگرالی

تاثیرات مثبت و منفی این ترم‌ها به‌سادگی در حوزه‌ی فرکانس قابل درک است. اثر مثبت مشتق‌گیری (افزایش پایداری نسبی) را می‌توان به‌دلیل افزایش فاز $\frac{\pi}{2}$ دانست و اثر منفی آن (افزایش حساسیت به نویزهای فرکانس بالا) نیز به علت افزایش بهره با شیب 20db/dec در فرکانس‌های بالا می‌باشد. در حالت انتگرالی، اثر مثبت (حذف کردن خطای حالت ماندگار) را می‌توان به سبب بهره بی‌نهایت در فرکانس صفر و اثر منفی آن (کاهش پایداری نسبی) را به دلیل کاهش فاز $\frac{\pi}{2}$ دانست.

طبیعی به‌نظر می‌رسد که با استفاده از فرم s^n و $1/s^n$ که $n \in \mathbb{R}_+$ ، بتوان بهبود بیشتری را شاهد بوده و ترکیبی از اثر مثبت بیشتر و اثر منفی کمتر بدست آورد. به‌همین دلیل، امروزه

تعداد کاربردهایی که در آن‌ها از حسابان کسری استفاده می‌شود به سرعت رو به افزایش است و در دهه‌های اخیر که کاربردهای آن در عرصه‌های الکتریکی-شیمیایی، سیستم‌های زیست‌محیطی، علوم مواد، ویسکوالاستیسیته و بقیه‌ی علوم معاصر به‌وضوح مشاهده می‌شود.

این نوع محاسبات به ما اجازه می‌دهد که بتوانیم یک سیستم واقعی را با دقت بیشتری نسبت به روش اعداد صحیح توصیف کنیم. اگرچه ممکن است مرتبه‌ی کسری سیستم‌های واقعی کم باشد، ولی این سیستم‌ها معمولاً کسری هستند. علت عمده‌ای که پیشتر فقط از مدل‌های مرتبه‌ی صحیح استفاده می‌شد، نبود راه‌حل برای معادلات مرتبه‌ی کسری بوده که این مساله امروزه حل شده است. مدل مرتبه‌ی صحیح را می‌توان حالت خاصی از مدل کلی‌تر، یعنی مدل مرتبه‌ی کسری در نظر گرفت. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که رفتار کلی جواب سیستم مرتبه‌ی کسری باید به جواب مدل مرتبه صحیح همگرا شود. از این اصل به‌عنوان طرحی برای ارزیابی نتایج حاصله استفاده می‌شود.

اخیراً سیستم‌های مرتبه‌ی کسری خطی ثابت با زمان در جوامع کنترلی اهمیت زیادی پیدا کرده، چرا که محاسبات کسری در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، ترمودینامیکی، مدارهای الکتریکی، سیستم‌های مکترونیک، فرآیندهای شیمیایی و... وارد شده است.

با توجه به این‌که مسئله‌ی پایداری در کنترل سیستم‌ها بسیار مهم می‌باشد، در زمینه‌ی کنترل سیستم‌های مرتبه‌ی کسری، مسایل و مشکلات حل نشده‌ی زیادی در ارتباط با پایداری سیستم‌ها وجود دارد. از جمله‌ی این مسایل می‌توان به مشاهده‌پذیری مقاوم، کنترل‌پذیری مقاوم و بررسی انواع پایداری‌ها اشاره نمود. در این کتاب در مورد بخشی از پیشرفت‌های بشری

در زمینه‌ی حسابان کسری صحبت خواهد شد. امید است موارد اشاره شده بتواند در جهت افزایش اطلاعات خواننده مفید واقع گردد.

در فصل دوم، اصول و مبانی حسابان کسری شامل تعریف مشتق-انتگرال مرتبه‌ی کسری، تبدیل لاپلاس و ویژگی‌های آن بحث می‌شود. برای آشنایی با سیستم‌های مرتبه‌ی کسری نیاز است تعریف عملگر مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری را بدانیم. در این فصل، ابتدا توابع مورد استفاده در حسابان کسری، مثل تابع گاما و میتاگ-لفلر و نیز صفحه‌های ریمان توصیف شده، سپس، سه تعریف عمومی مشتق و انتگرال کسری ارائه شده است. در ادامه، دو سیستم مرتبه‌ی کسری بنیادین در تعریف سیستم‌های مرتبه‌ی کسری تحت عنوان بلوک اساسی مرتبه‌ی کسری و مشتق-انتگرال مرتبه‌ی مختلط بررسی شده و نحوه‌ی نمایش آن‌ها در زمان یا فرکانس و پاسخ ضربه‌ی آن‌ها بیان می‌شود.

در فصل سوم، معادلات دیفرانسیل سیستم مرتبه‌ی کسری، نحوه‌ی بیان این سیستم‌ها، مباحث کنترلی، مانند بحث خطای دائمی، کیفیت پاسخ زمانی آن‌ها و ارتباط آن با قطب و صفرهای سیستم مرتبه‌ی کسری ارائه می‌شود. در انتهای این فصل، معادلات دیفرانسیل دو سیستم فیزیکی که عبارتند از: خط شبه-بی نهایت ختم شده به مقاومت و خط شبه-بی نهایت ختم شده به القاگر به دست آورده شده و سپس، نکات تکمیلی راجع به دو سیستم بلوک اساسی سیستم‌های مرتبه‌ی کسری و مشتق‌گیر مرتبه‌ی مختلط بیان می‌شود. در حقیقت، در این فصل پایداری دو سیستم آخری توسط ایده‌های کنترل کلاسیک بررسی شده و همچنین، یک روش پیاده‌سازی عملی سیستم‌های مرتبه‌ی کسری که بسیار پرکاربرد است، توضیح داده خواهد شد. فصل چهارم به بررسی پایداری سیستم‌های مرتبه‌ی کسری می‌پردازد. در این

فصل، اصول بنیادین درباره‌ی پایداری سیستم‌های مرتبه‌ی کسری در قالب مثال ارائه می‌شود. فصل پنجم جایگاه حسابان کسری در شناسایی و مدل‌سازی سیستم‌های واقعی را بیان نموده و شناسایی این سیستم‌ها در حوزه‌ی فرکانس شرح داده می‌شود. در اینجا دو رویکرد را می‌توان برای شناسایی سیستم بر حسب سیستم مرتبه‌ی کسری بیان نمود که عبارتند از رویکرد مرتبه‌ی توزیع‌شده و رویکرد ساختار نامعلوم. استفاده از مرتبه‌ی توزیع شده اساساً روش‌های قطع خط در حوزه‌ی زمان هستند و قابلیت پیاده‌سازی برخط^۱ را ندارند. در این روش‌ها فرض می‌شود که مرتبه‌های کسری موجود در سیستم معلوم باشند. از طرف دیگر، روش‌هایی که در رویکرد ساختار نامعلوم به کار می‌روند، در حوزه‌ی زمان یا فرکانس ارایه شده‌اند و شناسایی سیستم مرتبه‌ی کسری را به هر دو روش برخط یا آفلاین برخط انجام می‌دهند. در این روش‌ها فرض می‌شود که مرتبه‌های کسری موجود در سیستم نامعلوم بوده که باید توسط الگوریتم‌های بهینه‌سازی غیرخطی تخمین زده شوند. در این فصل از رویکرد مرتبه‌ی توزیع‌شده در حوزه‌ی فرکانس برای شناسایی سیستم استفاده می‌شود. فصل ششم چند روش تحقق^۲ و پیاده‌سازی^۳ سیستم‌های مرتبه‌ی کسری را ارایه می‌دهد. در فصل هفتم یک کاربرد عملی^۴ سیستم‌های کنترل مرتبه‌ی کسری، تحت عنوان سیستم کنترل کرن^۵ شرح داده می‌شود. در این فصل، چهار نسل از سیستم‌های کنترل کرن معرفی گشته و در مورد هر یک مثالی ذکر شده است.

^۱ Online

^۲ Realization

^۳ Implementation

^۴ Practical

^۵ Commande Robust d'Order Non Entire مخفف عبارت فرانسوی

۴-۱- مثالی از کاربرد مرتبه‌ی کسری

قبل از بیان مثال قضیه‌ی زیر ارائه می‌گردد.

تئوری ۱-۱: اگر فرض کنیم $F(s) = L\{f(t)\}$ (که در آن L نماد تبدیل لاپلاس است)، دارای ناحیه‌ی همگرایی $\Re$ باشد، آنگاه $F(s)$ روی $\Re$ تحلیلی است. برای اثبات به [۱] مراجعه نمایید.

حال، به بیان مثال می‌پردازیم. خط شبه‌بی‌نهایت با مقاومت و خازن بر واحد طول R و C موجود است. با تعریف $\alpha = 1/RC$ ولتاژ خط با معادله‌ی دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی صحیح زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) \quad (1-1)$$

با شرایط مرزی $v(0, t) = v_{in}(t)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$. از تبدیل لاپلاس دو طرفه L برای گرفتن تبدیل لاپلاس تابع زمانی با متغیر t و بیان آن با تابعی از متغیر s استفاده نموده و از تبدیل لاپلاس یک طرفه L_+ برای گرفتن تبدیل لاپلاس تابعی از متغیر x و بیان آن با تابعی از متغیر p بهره می‌بریم.

جریان خط در نقطه‌ی x برابر است با:

$$i(x, t) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) \quad (2-1)$$

از رابطه‌ی (۱-۱) تبدیل لاپلاس بر حسب متغیر t به صورت زیر به دست می‌آید:

$$sV(x, s) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, s) \quad (۳-۱)$$

با $V^*(x, s) = \frac{\partial}{\partial x} V(x, s)$ فرض . $V(0, s) = V_{in}(s) = L\{v_{in}(t)\}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x, s) = 0$

گرفتن تبدیل لاپلاس یک طرفه به ازای متغیر x از رابطه‌ی (۳-۱) نتیجه به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{s}{\alpha} W(p, s) = p^2 W(p, s) - pV(0, s) - V^*(0, s) \quad (۴-۱)$$

که در آن $W(p, s) = L_+ V(x, .)$. با بازنویسی و حل معادله‌ی فوق برای تعیین $W(p, s)$ داریم:

$$W(p, s) = \frac{p}{p^2 - \frac{s}{\alpha}} V(0, s) + \frac{1}{p^2 - \frac{s}{\alpha}} V^*(0, s) \quad (۵-۱)$$

با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس یک طرفه داریم $\frac{p}{p^2 - a^2} = L_+ \{\cosh(ax)\}$ و

لذا خواهیم داشت: $\frac{a}{p^2 - a^2} = L_+ \{\sinh(ax)\}$

$$\begin{aligned}
 V(x,s) &= \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x\right)V(0,s) + \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x\right)V^*(0,s) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\exp\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x\right)\right)V(0,s) + \frac{1}{2}\left(\exp\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x\right)\right)\sqrt{\frac{\alpha}{s}}V^*(0,s) \quad (۶-۱) \\
 &= \frac{1}{2}\exp\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x\right)\left(V(0,s) + \sqrt{\frac{\alpha}{s}}V^*(0,s)\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x\right)\left(V(0,s) - \sqrt{\frac{\alpha}{s}}V^*(0,s)\right)
 \end{aligned}$$

$\sqrt{s}$ روی محور حقیقی منفی $\mathbb{R}_-$ تحلیلی نیست و چون α عدد حقیقی نامنفی است،

$\sqrt{\frac{s}{\alpha}}$ در $\mathbb{R}_-$ تحلیلی نیست. لذا $V(x,s)$ برای $s \in \mathbb{R}_-$ تحلیلی نیست. پس طبق قضیه‌ی

(۱-۱)، $\mathbb{R}_- \not\subset \mathfrak{R}$. برای $s \in \mathfrak{R}$ که $|\arg(s)| < \pi$ باشد، نتیجه می‌شود که برای $s \in \mathfrak{R}$

رابطه‌ی $\left|\arg\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right)\right| < \frac{\pi}{2}$ برقرار باشد. این معادل است با $s \in \mathfrak{R}$ و $\operatorname{Re}\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) > 0$. چون

$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x,s) = 0$ ، اولین ترم در (۶-۱) باید صفر باشد. لذا

$$V(0,s) + \sqrt{\frac{\alpha}{s}}V^*(0,s) = 0 \quad (۷-۱)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس دوطرفه از (۷-۱) داریم:

$$I(x,s) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} V(x,s) = -\frac{1}{R} V^*(x,s) \quad (۸-۱)$$

پس معادله‌ی (۷-۱) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$V(0, s) = R \sqrt{\alpha} \frac{1}{\sqrt{s}} I(0, s) \quad (9-1)$$

پس امپدانس خط با اتلاف شبه-بی‌نهایت در $x = 0$ می‌شود:

$$Z(0, s) = \frac{V(0, s)}{I(0, s)} = R \sqrt{\alpha} \frac{1}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{R}{C}} \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (10-1)$$

با تعریف $A = \sqrt{\frac{R}{C}}$ ، $(10-1)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

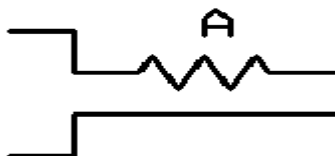
$$Z(0, s) = \frac{V(0, s)}{I(0, s)} = \frac{A}{\sqrt{s}} \quad (11-1)$$

در فصل بعد دیده می‌شود که معادله‌ی دیفرانسیل مرتبط با $(11-1)$ به شکل زیر است:

$$i(0, t) = \frac{1}{A} {}_{-\infty} d_t^{0.5} v(0, t) \quad (12-1)$$

این عبارت تعمیم مشتق از مرتبه‌ی صحیح به مرتبه‌ی غیر صحیح است.

نماد مداری خط با اتلاف شبه-بی‌نهایت در شکل $(1-1)$ آورده شده است.



شکل $(1-1)$ نماد مداری خط با اتلاف شبه-بی‌نهایت